Wskazówka do zadania 6 - MACIERZE

Metoda Eliminacji Gaussa.

Załóżmy, że dana jest macierz A [4 x 4] i mamy ją sprowadzić do macierzy trójkątnej górnej, czyli takiej, w której wszystkie elementy pod przekątną macierzy są wyzerowane.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a(1,1) & a(1,2) & a(1,3) & a(1,4) \\ 0 & a(2,2) & a(2,3) & a(2,4) \\ 0 & 0 & a(3,3) & a(3,4) \\ 0 & 0 & 0 & a(4,4) \end{bmatrix}$$

Zrealizujemy to poprzez elementarne przekształcenia i odejmowanie wielokrotności kolejnych wierszy (zaczynając od pierwszego).

Pierwszy wiersz pozostawiamy bez zmian. Zaczniemy od wyzerowania elementu a(2,1):

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby wyzerować pierwszy element (a(2,1)) musimy od wiersza drugiego odjąć wielokrotność pierwszego wiersza. W tym celu wyliczymy sobie mnożnik:

$$\lambda=\frac{a(2,1)}{a(1,1)}=\frac{2}{1}=2$$

Następnie wykonamy działanie

wiersz 2 - λ * wiersz 1:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolejnym elementem, który wyzerujemy będzie a(3,1):

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby wyzerować ten element postępujemy analogicznie jak poprzednio - musimy od wiersza trzeciego odjąć wielokrotność pierwszego wiersza. W tym celu wyliczymy ponownie mnożnik:

$$\lambda=\frac{a(3,1)}{a(1,1)}=\frac{-1}{1}=-1$$

I wykonujemy działanie:

wiersz 3 - λ * wiersz 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogicznie postępujemy z czwartym wierszem i otrzymujemy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Kolejny element, który wyzerujemy już będzie w drugiej kolumnie – a(3,2):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Wyliczamy mnożnik względem drugiego wiersza, który już pozostawiamy bez zmian:

$$\lambda = \frac{a(3,2)}{a(2,2)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

Wykonujemy działanie:

wiersz 3 - λ * wiersz 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1.5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Wyliczamy mnożnik dla czwartego wiersza:

$$\lambda = \frac{a(4,2)}{a(2,2)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

I zerujemy element a(4,2) obliczając:

wiersz 3 - λ * wiersz 2:

Wskazówka do zadania 6 - MACIERZE

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 1.5 & -2\\ 0 & 0 & 1.5 & -3\end{bmatrix}$$

Ostatnią operacją jest wyzerowanie elementu a(4,3):

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 1.5 & -2\\ 0 & 0 & 1.5 & -3\end{bmatrix}$$

Po raz kolejny wyliczamy mnożnik

$$\lambda=\frac{a(4,3)}{a(3,3)}=\frac{1,5}{1,5}=1$$

I wykonujemy działanie

wiersz 4 - λ * wiersz 3.

Otrzymujemy macierz trójkątną górną, a więc dokonaliśmy Eliminacji Gaussa:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 1.5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -8\end{bmatrix}$$

Przyjrzyjmy się kolejnym operacjom jednostkowym (już zapisanym w postaci pseudo-kodu) i spróbujmy znaleźć jakiś schemat postępowania:

$$\lambda=\frac{a(2,1)}{a(1,1)}$$

$$a(2,1)=a(2,1)-\lambda*a(1,1)$$

$$a(2,2)=a(2,2)-\lambda*a(1,2)$$

$$a(2,3)=a(2,3)-\lambda*a(1,3)$$

$$a(2,4)=a(2,4)-\lambda*a(1,4)$$

Wskazówka do zadania 6 - MACIERZE

$$\lambda = \frac{a(3,1)}{a(1,1)}$$
$$a(3,1) = a(3,1) - \lambda * a(1,1)$$
$$a(3,2) = a(3,2) - \lambda * a(1,2)$$
$$a(3,3) = a(3,3) - \lambda * a(1,3)$$
$$a(3,4) = a(3,4) - \lambda * a(1,4)$$

$$\lambda = \frac{a(4,1)}{a(1,1)}$$
$$a(4,1) = a(4,1) - \lambda * a(1,1)$$
$$a(4,2) = a(4,2) - \lambda * a(1,2)$$
$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(1,3)$$
$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(1,4)$$

$$\lambda = \frac{a(3,2)}{a(2,2)}$$
$$a(3,2) = a(3,2) - \lambda * a(2,2)$$
$$a(3,3) = a(3,3) - \lambda * a(2,3)$$
$$a(3,4) = a(3,4) - \lambda * a(2,4)$$

$$\lambda = \frac{a(4,2)}{a(2,2)}$$
$$a(4,2) = a(4,2) - \lambda * a(2,2)$$
$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(2,3)$$
$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(2,4)$$

$$\lambda = \frac{a(4,3)}{a(3,3)}$$
$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(3,3)$$
$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(3,4)$$

Można zauważyć (po krótszej, albo nieco dłuższej chwili) pewien schemat:

$$\lambda = \frac{a(2,1)}{a(1,1)}$$
$$a(2,1) = a(2,1) - \lambda * a(1,1)$$
$$a(2,2) = a(2,2) - \lambda * a(1,2)$$
$$a(2,3) = a(2,3) - \lambda * a(1,3)$$
$$a(2,4) = a(2,4) - \lambda * a(1,4)$$

$$\lambda = \frac{a(3,1)}{a(1,1)}$$
$$a(3,1) = a(3,1) - \lambda * a(1,1)$$
$$a(3,2) = a(3,2) - \lambda * a(1,2)$$
$$a(3,3) = a(3,3) - \lambda * a(1,3)$$
$$a(3,4) = a(3,4) - \lambda * a(1,4)$$

$$\lambda = \frac{a(4,1)}{a(1,1)}$$
$$a(4,1) = a(4,1) - \lambda * a(1,1)$$
$$a(4,2) = a(4,2) - \lambda * a(1,2)$$
$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(1,3)$$
$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(1,4)$$

$$\lambda = \frac{a(3,2)}{a(2,2)}$$
$$a(3,2) = a(3,2) - \lambda * a(2,2)$$
$$a(3,3) = a(3,3) - \lambda * a(2,3)$$
$$a(3,4) = a(3,4) - \lambda * a(2,4)$$

$$\lambda = \frac{a(4,2)}{a(2,2)}$$
$$a(4,2) = a(4,2) - \lambda * a(2,2)$$
$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(2,3)$$
$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(2,4)$$

$$\lambda = \frac{a(4,3)}{a(3,3)}$$
$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(3,3)$$
$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(3,4)$$

A więc mamy trzy kolory:

Wskazówka do zadania 6 - MACIERZE

Czerwony – do którego wiersza się odwołujemy (ten, który odejmujemy po przemnożeniu przez mnożnik)

Niebieski – na którym wierszu obecnie wykonujemy działania

Zielony – wykonywanie działań

$$\lambda = \frac{a(2,1)}{a(1,1)}$$

$$a(2,1) = a(2,1) - \lambda * a(1,1)$$

$$a(2,2) = a(2,2) - \lambda * a(1,2)$$

$$a(2,3) = a(2,3) - \lambda * a(1,3)$$

$$a(2,4) = a(2,4) - \lambda * a(1,4)$$

Zmiana niebieskiego

$$\lambda = \frac{a(3,1)}{a(1,1)}$$

$$a(3,1) = a(3,1) - \lambda * a(1,1)$$

$$a(3,2) = a(3,2) - \lambda * a(1,2)$$

$$a(3,3) = a(3,3) - \lambda * a(1,3)$$

$$a(3,4) = a(3,4) - \lambda * a(1,4)$$

Zmiana niebieskiego

$$\lambda = \frac{a(4,1)}{a(1,1)}$$

$$a(4,1) = a(4,1) - \lambda * a(1,1)$$

$$a(4,2) = a(4,2) - \lambda * a(1,2)$$

$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(1,3)$$

$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(1,4)$$

Zmiana czerwonego

$$\lambda = \frac{a(3,2)}{a(2,2)}$$

$$a(3,2) = a(3,2) - \lambda * a(2,2)$$

$$a(3,3) = a(3,3) - \lambda * a(2,3)$$

$$a(3,4) = a(3,4) - \lambda * a(2,4)$$

Zmiana niebieskiego

Wskazówka do zadania 6 - MACIERZE

$$\lambda = \frac{a(4,2)}{a(2,2)}$$

$$a(4,2) = a(4,2) - \lambda * a(2,2)$$

$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(2,3)$$

$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(2,4)$$

Zmiana czerwonego

$$\lambda = \frac{a(4,3)}{a(3,3)}$$

$$a(4,3) = a(4,3) - \lambda * a(3,3)$$

$$a(4,4) = a(4,4) - \lambda * a(3,4)$$

Łatwo zauważyć, że „zielony zmienia się" po każdym wyliczeniu mnożnika, a więc za każdym razem kiedy zmieni się kolor niebieski (przejdziemy do kolejnego wiersza).

Posiadając te informacje możemy przystąpić do narysowania schematu blokowego oraz napisania programu liczącego Eliminację Gaussa.